Université de Bretagne Occidentale
UFR Sciences et Techniques
LICENCE PARCOURS 1

ANALYSE 1

Partiel mi-semestre, le 22 octobre 2016, 9h30-10h30

CORRIGE

Exercice 1. a. Faux : la fonction $x \mapsto x^2$ de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ n'est ni injective ni surjective.

b. Vrai : la fonction ln étant la fonction réciproque de la fonction exp, cette dernière est aussi la fonction réciproque de la première, et donc $\ln(\exp(x)) = x$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

c. Faux : $\sqrt{(-1)^2} = \sqrt{1} = 1 \neq -1$.

d. Faux : $2^{1\times 2} = 2^2 = 4$ mais $2^1 \times 2^2 = 2 \times 4 = 8$.

e. Faux : $2^{(1^2)} = 2^1 = 2$ mais $(2^1)^2 = 2^2 = 4$.

Exercice 2. a. On a

$$f'(x) = \frac{1}{e^{2x} + e^x + 1} \cdot \left(e^{2x} + e^x + 1\right)' = \frac{2e^{2x} + e^x}{e^{2x} + e^x + 1}.$$

b. D'après le a, $f' > 0$ sur $\mathbb{R}$. La fonction f est donc strictement croissante. Comme sa limite en $-\infty$ est égale à $\ln(1) = 0$, et sa limite en $+\infty$ est égale à $+\infty$, l'image $f(\mathbb{R}) = \mathbb{R}_+^\star$ par continuïté de f.

c. La fonction f est injective car strictement croissante, elle est surjective sur son image par définition de l'image.

d. Comme $f(0) = \ln(3)$, on a $f^{-1}(\ln(3)) = 0$.

e. D'après le d, on a

$$(f^{-1})'(\ln(3)) = \frac{1}{f'(f^{-1}(\ln(3)))} = \frac{1}{f'(0)} = 1$$

d'après le a.

f. On résoud $y = f(x)$ en x, et on obtient

$$e^y = e^{2x} + e^x + 1,$$

c-à-d

$$(e^x)^2 + e^x + 1 - e^y = 0.$$

Il s'ensuit que

$$e^x = \frac{-1 \pm \sqrt{1 - 4(1 - e^y)}}{2} = -\tfrac{1}{2} \pm \tfrac{1}{2}\sqrt{4e^y - 3}.$$

Comme $e^x > 0$, on a obligatoirement

$$e^x = -\tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{2}\sqrt{4e^y - 3}.$$

Du coup,

$$x = \ln(-\tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{2}\sqrt{4e^y - 3}),$$

et

$$f^{-1}(y) = \ln(-\tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{2}\sqrt{4e^y - 3})$$

quel que soit $y \in \mathbb{R}_+^\star$.

g. On a

$$(f^{-1})'(y) = \frac{1}{-\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{4e^y - 3}} \cdot \left(-\tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{2}\sqrt{4e^y - 3}\right)' =$$
$$\frac{1}{-\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{4e^y - 3}} \cdot \tfrac{1}{2} \cdot \frac{1}{2\sqrt{4e^y - 3}} \cdot (4e^y - 3)' =$$
$$\frac{1}{-\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{4e^y - 3)}} \cdot \frac{e^y}{\sqrt{4e^y - 3}}.$$

h. On obtient

$$(f^{-1})'(\ln(3)) = \frac{1}{-\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{4 \times 3 - 3}} \cdot \frac{3}{\sqrt{4 \times 3 - 3}} = 1 \times \tfrac{3}{3} = 1.$$